

• Έστω τ.μ X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = c \cdot x(1-x) \quad \forall x \in [0,1]$$

1. Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c
2. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X \leq 1/4)$
3. Να βρεθεί η μέση τιμή της X

ΛΥΣΗ

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 c \cdot x(1-x) dx = 1 \Rightarrow c \cdot \int_0^1 -x^2 + x dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow c \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

$$2. P(X \leq \frac{1}{4}) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{4}} 6 \cdot x(1-x) dx =$$

$$= 6 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^{\frac{1}{4}} = 6 \cdot \left(-\frac{(\frac{1}{4})^3}{3} + \frac{(\frac{1}{4})^2}{2}\right) =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{4^3} + 3 \cdot \frac{1}{4^2} = -\frac{1}{32} + \frac{3}{16} = \frac{5}{32} = \frac{1}{7}$$

$$3. E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 6x^2(1-x) dx =$$

$$= \int_0^1 (6x^2 - 6x^3) dx = 6 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$